Ruang Sampel

Bahan Kuliah *II2092 Probabilitas dan Statistik*

Oleh: Rinaldi Munir

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB

Ruang Sampel (*Sample Space*)

- **Ruang sampel**: himpunan semua hasil (*outcome*) yang mungkin dari suatu eksperimen (percobaan).
- Setiap hasil dari ruang sampel disebut **titik sample** (*sample point*).

  Notasi: $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

- Contoh: melempar dadu → S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

  melempar koin dua kali → S = {GA, GG, AA, AG}

  G = gambar, A = angka

- Ruang sampel yang anggotanya berhingga disebut **ruang sampel finit**, sedangkan **ruang sampe infinit**.

- Contoh ruang sampe infinit: sebutir debu dijatuhkan ke dalam bidang berbentuk lingkaran dengan jari-jari 4. Posisi jatuhnya debu di dalam bidang lingkaran dinyatakan koordinat (x, y). Kumpulan semua titik yang mungkin sebagai tempat jatuhnya debu di dalam lingkaran adalah ruang sampel, yaitu

  $$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

- Ruang sampel (finit atau infinit) yang anggotanya dapat dihitung disebut **ruang sampel diskrit**, jika tidak dapat dihitung disebut **ruang sampel kontinu** (non-diskrit).

Menghitung Titik Sampel

Kaidah dasar menghitung titik sampel:

1. **Kaidah perkalian (*rule of product*)**

   Bila eksperimen 1 mempunyai p hasil, percobaan 2 mempunyai q hasil, maka bila eksperimen 1 **dan** eksperimen 2 dilakukan, maka terdapat $p \times q$ hasil.

2. **Kaidah penjumlahan (*rule of sum*)**

   Bila eskperimen 1 mempunyai p hasil, percobaan 2 mempunyai q hasil, maka bila eksperimen 1 **atau** eksperimen 2 dilakukan, maka terdapat $p + q$ hasil.

Contoh 1

Sebuah restoran menyediakan lima jenis makanan, misalnya nasi goreng, roti, soto ayam, sate, dan sop, serta tiga jenis minuman, misalnya susu, kopi, dan teh. Jika setiap orang boleh memesan satu makanan dan satu minuman, berapa banyak pasangan makanan dan minuman yang dapat dipesan?

Jawaban:

Ada 5 cara memilih makanan, yaitu nasi goreng, roti, soto ayam, sate, dan sop. Ada 3 cara memilih minuman, yaitu susu, kopi, dan teh, sehingga dengan menggunakan kaidah perkalian, jumlah kemungkinan pasangan makanan dan minuman yang dapat dipesan adalah $5 \times 3 = 15$ pasang.

Contoh 2

Sekelompok mahasiswa terdiri atas 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang wakil pria dan satu orang wakil wanita?

Jawaban:

Ada 4 kemungkinan memilih satu wakil pria, dan 3 kemungkinan memilih satu wakil wanita. Jika dua orang wakil harus dipilih, masing-masing 1 pria dan 1 wanita, maka jumlah kemungkinan perwakilan yang dapat dipilih adalah $4 \times 3 = 12$.

Contoh 3

Sekelompok mahasiswa terdiri atas 4 orang pria dan 3 orang wanita. Berapa jumlah cara memilih satu orang yang mewakili kelompok tersebut (tidak peduli pria atau wanita)?

Jawaban:

Ada 4 kemungkinan memilih satu wakil pria, dan 3 kemungkinan memilih satu wakil wanita. Jika hanya satu orang wakil yang harus dipilih (pria atau wanita), maka jumlah kemungkinan wakil yang dapat dipilih adalah 4 + 3 = 7.

Perluasan Kaidah Menghitung

Jika n buah eksperimen masing-masing mempunyai $p_1, p_2, \ldots, \quad p_n$, hasil yang yang dalam hal ini setiap p_i tidak bergantung pada pilihan sebelumnya, maka jumlah hasil percobaan yang mungkin terjadi adalah:

(a) $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ (kaidah perkalian).

(b) $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ (kaidah penjumlahan

Contoh 4

Berapa banyak jumlah kata dengan 5 huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf *a*, *b*, *c*, *d*, *e* jika tidak boleh ada huruf yang berulang di dalam kata?

Jawaban:

Ada 5 cara mengisi posisi huruf pertama di dalam kata, 4 cara mengisi posisi huruf kedua (karena 1 huruf sudah dipakai untuk kotak pertama), 3 cara untuk mengisi posisi huruf ketiga, 2 cara untuk mengisi posisi huruf keempat, dan 1 cara untuk mengisi posisi huruf kelima.

5 cara	4 cara	3 cara	2 cara	1 cara
____	____	____	____	____

Karena setiap posisi harus diiisi dengan 1 huruf maka kita menggunakan kaidah perkalian. Jumlah kata yang dapat dibentuk adalah $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ buah.

Contoh 5:

Perpustakaan memiliki 6 buah buku berbahasa Inggris, 8 buah buku berbahasa Perancis, dan 10 buah buku berbahasa Jerman. Masing-masing buku berbeda judulnya. Berapa jumlah cara memilih

(a) 3 buah buku, masing-masing dari tiap bahasa berbeda,

(b) 1 buah buku (sembarang bahasa).

Jawaban:

(a) Jumlah cara memilih 3 buah buku, masing-masing dari tiap bahasa adalah (6)(8)(10) = 480 cara.

(b) Jumlah cara memilih 1 buah buku (sembarang bahasa) = 6 + 8 + 10 = 24 cara

Latihan

Suatu bilangan dibentuk dari angka-angka 2, 3, 4, 5, 7, 8, dan 9. Misalkan pengulangan angka tidak dibolehkan. Berapa banyak bilangan 4-angka yang kurang dari 5000 namun habis dibagi 5 yang dapat dibentuk dari angka-angka tersebut?

(jawaban ada pada lembar sesudah ini)

Jawaban:

- Ada 4 angka bilangan yang akan dibentuk: _ _ _ _

- Karena disyaratkan bilangan kelipatan 5, maka angka paling kanan hanya dapat diisi dengan angka 5 saja (satu cara).
- Angka posisi ke-1 dapat diisi dengan 3 cara (yaitu 2, 3, dan 4).
- Angka posisi ke-2 dapat diisi dengan 5 cara (2 angka lain sudah dipakai untuk posisi ke-1 dan ke-4).
- Angka posisi ke-3 dapat diisi dengan 4 cara (3 angka lain sudah dipakai untuk posisi ke-1, ke-2 dan ke-4).
- Karena seluruh posisi angka harus terisi, maka kita menggunakan kaidah perkalian untuk menghitung jumlah bilangan bulat yang dapat dibentuk, yaitu $3 \times 5 \times 4 \times 1 = 60$ buah.

Permutasi

- Permutasi adalah susunan berbeda pengaturan benda-benda di dalam kumpulannya yang dapt diambil sebagian atau seluruhnya.

- Banyaknya permutasi dari n benda berlainan adalah n!
  (n! = 1 x 2 x 3 x … x n)

Contoh 6: Berapa banyak "kata" yang terbentuk dari huruf-huruf kata "BOSAN"?

Jawaban:

- Cara 1 (kaidah perkalian): (5)(4)(3)(2)(1) = 120 kata
- Cara 2 (permutasi): 5! = 120 kata

Contoh 7:

Berapa banyak cara mengurutkan nama 25 orang mahasiswa?

Jawaban: 25!

- Banyaknya permutasi dari n benda berlainan jika diambil r sekaligus adalah $P(n, r) = n!/(n - r)!$

Notasi lain: ${}_nP_r$

Contoh 8:

Berapa banyak pasangan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf alfabet jika tidak boleh ada perulangan huruf?

Jawaban: $P(26, 2) = 26!/24! = 26 \times 25 = 650$

Contoh 9:

Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk yang terdiri dari 4 huruf berbeda dan diikuti dengan 3 angka yang berbeda pula?

Jawaban:

Ada $P(26, 4)$ cara mengisi posisi 4 huruf dan $P(10, 3)$ cara untuk mengisi posisi 3 buah angka. Karena string disusun oleh 4 huruf dan 3 angka, maka jumlah string yang dapat dibuat adalah $P(26, 4) \times P(10,3) =$ 258.336.000

- Permutasi n buah benda yang mana n_1 buah berjenis pertama, n_2 buah berjenis kedua, …, n_k bola berjenis k adalah:

  $$P(n; n_1, n_2, ..., n_k) = n! / (n_1! \, n_2! \, ... \, n_k!)$$

  Contoh 10: Berapa banyak *string* yang dapat dibentuk dengan menggunakan huruf-huruf dari kata *MISSISSIPPI*?

  Jawaban:

  $S = \{M, I, S, S, I, S, S, I, P, P, I\}$

  huruf M = 1 buah (n_1)

  huruf I = 4 buah (n_2)

  huruf S = 4 buah (n_3)

  huruf P = 2 buah (n_4)

  n = 1 + 4 + 4 + 2 = 11 buah = jumlah elemen S

  Jumlah *string* = $P(11; 1, 4, 4, 2) = 11! / (1!\, 4!\, 4!\, 2!)$ = 34650 buah.

Contoh 11

12 lembar karton akan diwarnai sehingga 3 diantaranya berwarna hijau, 2 berwarna merah, 2 berwarna kuning, dan sisanya berwarna biru. Berapa jumlah cara pengecatan?

Jawaban:

Diketahui $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, $n_4 = 5$, dan

$$n_1 + n_2 + n3 + n_4 = 3 + 2 + 2 + 5 = 12$$

Jumlah cara pengecatan $= P(12; 3, 2, 2, 5)$

$= 12! / (3!\ 2!\ 2!\ 5!)$

$= 166320$

Contoh 12:

12 buah lampu berwarna (4 merah, 3 putih, dan 5 biru) dipasang pada 18 buah soket dalam sebuah baris (sisanya 6 buah soket dibiarkan kosong). Berapa jumlah cara pengaturan lampu?

Jawaban:

Diketahui, n = 18; n_1 = 4, n_2 = 3, n_3 = 5,

dan n_4 = 6 (*socket* kosong)

Jumlah cara pengaturan lampu = P (18; 4, 3, 5, 6)

= 18! / (4! 3! 5! 6!)

= cara

Contoh 13:

Berapa banyak cara membagikan delapan buah buku berbeda kepada 3 orang mahasiswa, bila Billy mendapat empat buah buku, dan Andi serta Toni masing-masing memperoleh 2 buah buku.

Jawaban:

Diketahui $n = 8$, $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$,

dan $n1 + n2 + n3 = 4 + 2 + 2 = 8$

Jumlah cara membagi seluruh buku = $8!/(4!\ 2!\ 2!)$

= 420 cara

Kombinasi

- Bentuk khusus dari permutasi adalah kombinasi. Jika pada permutasi urutan kemunculan diperhitungkan, maka pada kombinasi, urutan kemunculan diabaikan.

- Jumlah kombinasi dari n benda yang berlainan bila diambil sebanyak r sekaligus adalah C(n, r)

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

- Notasi lain: $\binom{n}{r}$

Contoh 14: Berapa banyak himpunan bagian yang terdiri dari 2 elemen yang dapat dibentuk dari himpunan dengan 3 elemen?

Jawaban:

Jadi, jumlah cara memilih 3 dari 4 elemen himpunan adalah $C(4, 3) = 4! / (3!\ 1!) = 4$.

Misalkan P = {a, b, c, d}, maka himpunan bagian itu adalah $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, dan $\{b, c, d\}$.

Urutan di dalam himpunan bagain tidak penting

Jadi, {a, b, c} = {c, b, a}

Contoh 15: Berapa banyak cara membentuk panitia (komite, komisi, dsb) yang beranggotakan 5 orang orang dari sebuah fraksi di DPR yang beranggotakan 25 orang?

Jawaban:

- Panitia atau komite adalah kelompok yang tidak terurut, artinya setiap anggota di dalam panitia kedudukannya sama.
- Misal lima orang yang dipilih, A, B, C, D, dan E, maka urutan penempatan masing-masingnya di dalam panitia tidak penting (ABCDE sama saja dengan BACED, ADCEB, dan seterusnya). Banyaknya cara memilih anggota panitia yang terdiri dari 5 orang anggota adalah $C(25,5) = 53130$ cara.

Contoh 16:

Ada 5 orang mahasiswa jurusan Matematika dan 7 orang mahasiswa jurusan Kimia. Berapa banyak cara membentuk panitia yang terdiri dari 4 orang jika :

(a) tidak ada batasan jurusan → C(12, 4)

(b) semua anggota panitia harus dari jurusan Matematika → C(5,4)

(c) semua anggota panitia harus dari jurusan Kimia → C(7,4)

(d) semua anggota panitia harus dari jurusan yang sama → C(5,4) + C(7,4)

(e) 2 orang mahasiswa per jurusan harus mewakili.→ C(5,2) C(7,2)

Latihan

Berapa banyak cara membentuk sebuah panitia yang beranggotakan 5 orang yang dipilih dari 7 orang pria dan 5 orang wanita, jika di dalam panitia tersebut paling sedikit beranggotakan 2 orang wanita?